1 비둘기집의 원리와 램지 이론

비둘기집의 원리

정리 1 (비둘기집의 원리)**.** n개의 비둘기 집에 $n+1$마리의 비둘기가 있다면 그 중 어떤 집에는 두 마리 이상의 비둘기가 있다.

예제 1. 세 개의 정수가 있다면 그 중 두 개는 홀짝이 같다.

예제 2. 임의의 양의 정수 n에 대해, $p-q$가 n의 배수가 되는 서로 다른 소수 p,q를 찾을 수 있음을 증명하라.

예제 3. 평면 상에서 (x,y)좌표가 모두 정수인 점을 격자점이라고 한다. 5개의 격자점이 있다면 그 중 어느 두개의 중점은 여전히 격자점이다.

예제 4. 평면 상에서 13개의 격자점이 있다면 그 중 어느 4점의 무게중심은 여전히 격자점이다. (12개로 문제를 숫자를 고치면 안되는 이유는?)

예제 5. n이 어떤 양의 정수라고 하자. 임의의 주어진 실수 α에 대하여 어떤 정수 p,q가 있어서 $1\le q\le n$이고

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$$

임을 보여라.

예제 6. $mn+1$개의 서로 다른 실수로 구성된 수열 $a_1,a_2,\ldots,a_{mn+1}$이 있다. 이때 반드시 길이 $m+1$인 증가하는 부분수열이 존재하던가, 아니면 길이가 $n+1$인 감소하는 부분수열이 존재함을 보여라.

그래프

그래프란 $G=(V,E)$과 같이 꼭지점의 집합V와 변의 집합E의 순서쌍을 말한다. 이때 변이란 서로 다른 두 꼭지점으로 구성된 집합을 뜻한다.

두 꼭지점 a,b를 "잇는" 변은 $\{a,b\}$, 편의상 ab라고도 쓰자. $ab=ba$.

예제 7. $G=(\{a,b,c\},\{ab,bc\})$

그래프 G에 대해서, $V(G)$는 G의 변의 집합, $E(G)$는 G의 변의 집합.

꼭지점v의 차수 $d(v)$란 그 꼭지점을 만나는 변의 개수.

정리 2.

$$\sum_{v\in V(G)} d(v)=2|E(G)|.$$

파티 문제

예제 8. 6명이 모여서 파티를 한다. 어떤 두 사람은 서로 알던가, 아니면 서로 모르는 사이이다. 이때 서로 다 아는 3명이 존재하던가, 서로 모르는 3명이 존재함을 보여라.

완전그래프 K_n을 n개 꼭지점을 가졌으며, 모든 서로 다른 두 꼭지점이 변으로 연결된 그래프이다.

그래프 H가 그래프 G의 부분그래프란, $V(H)\subseteq V(G)$이고 $E(H)\subseteq E(G)$임을 뜻한다.

예제 9. K_6의 각 변을 빨강 혹은 파랑으로 칠하자. 각 변을 어떻게 칠하던지간에 세 변의 색깔이 같은 꼭지점 3개로 이루어진 K_3 부분그래프가 존재한다.

램지수

$x \geq 2$이고 $y \geq 2$일때, $R(x, y) = \min\{n : K_n$의 변을 어떻게 빨강/파랑으로 칠하든지 빨강색 K_x 부분그래프나 파랑색 K_y 부분그래프를 찾을 수 있다$\}$.

$R(3, 3) = 6$.

정리 3. $R(x, y) \leq R(x-1, y) + R(x, y-1)$.

$R(x, 2) = x$.

결론: 어찌되었던 $R(x, y)$는 유한한 숫자로 존재한다.

예제 10.

$$R(x, y) \leq \binom{x+y-1}{x-1}.$$

$R(k, k)$는 얼마나 클까?

정리 4. $R(k, k) \geq 2^{k/2}$.

다시 말하면,

> $n < 2^{k/2}$라면 K_n의 변을 적당히 빨강과 검정으로 색칠하되, 빨강색 K_k 부분그래프나 검정색 K_k 부분그래프가 없도록 할 수 있다.

참고: 일반적으로

$$c_1 \frac{k^2}{\log k} \leq R(3, k) \leq c_2 \frac{k^2}{\log k}.$$

색깔수 늘리기

$R(m_1, m_2, \ldots, m_r)$은 r개의 색으로 K_n의 변을 어떻게 칠하든지간에 반드시 어떤 i에 대해서는 색 i로만 변이 칠해진 K_{m_i} 부분그래프가 존재할 최소의 n이다.

예제 11. 17명이 모여서 파티를 한다. 임의의 두 사람은 서로 잘 아는 사이든지, 아니면 서로 만난 적도 없던가, 아니면 만났지만 모르는 사이이다. 이때 서로 다 아는 3명이 존재하던가, 서로 만난 적 없는 3명이 존재하거나, 서로 만난 적만 있지 모르는 3명이 존재함을 보여라.

즉, $R(3, 3, 3) \leq 17$.

정리 5. $m_1, m_2, \ldots, m_r \geq 3$이라면

$$\begin{aligned} R(m_1, m_2, \ldots, m_r) \leq &(R(m_1 - 1, m_2, m_3, \ldots, m_r) - 1) \\ &+ (R(m_1, m_2 - 1, m_3, \ldots, m_r) - 1) \\ &+ \cdots + (R(m_1, m_2, \ldots, m_r - 1) - 1) + 1 + 1. \end{aligned}$$

$m_2, m_3, \ldots, m_r \geq 2$이라면 $R(2, m_2, \ldots, m_r) \leq R(m_2, \ldots, m_r)$.

결론: 어찌되었든 $R(m_1, m_2, \ldots, m_r)$은 유한한 값을 가진다.

예제 12. 모든 자연수 r에 대하여 다음과 같은 성질을 만족하는 N이 존재함을 증명하라.

> $n > N$이라면 1부터 n까지 모든 자연수를 r개의 색으로 어떻게 칠하든지간에 같은 색으로 이루어져있으면서 $x + y = z$를 만족하는 세 수가 반드시 존재한다.

예제 13. 평면에서 어느 세 점도 일직선 상에 있지 않도록 5개의 점을 뽑으면, 반드시 어떤 4개 점은 볼록4각형이 된다.

예제 14. 모든 자연수 n에 대하여 어떤 값 N이 있어서 어느 세 점도 일직선 상에 없도록 하면서 평면에서 N개의 점을 어떻게 뽑든지간에 그 중 n개의 점은 볼록n각형을 만든다.

2 수학적 귀납법

수학적 귀납법

공집합이 아닌 자연수 집합의 부분집합은 항상 최소 원소를 포함한다.

명제 $P(n)$이 모든 자연수 n에 대해 참임을 보이자면,

1. $P(1)$을 증명하고,
2. $P(n)$이 참이면 $P(n+1)$이 참임을 증명한다.

혹은

1. $P(1)$을 증명하고,
2. $P(1), P(2), \ldots, P(n)$이 참이면 $P(n+1)$이 참임을 증명한다.

$S = \{n : P(n)$이 거짓$\}$이라고 하자.

만일 $S \neq \emptyset$이라면 최소원소 n을 가진다. (반례 중 n값이 제일 작은 것을 뽑는다.) …… 모순임을 보인다.

예제 15. n은 2이상인 정수라 하자. $2n$개의 꼭지점을 가진 그래프가 n^2+1개 이상의 변을 가지면 반드시 K_3 부분그래프를 가진다.

3 그래프이론

연결된 그래프 (connected graph)

꼭지점 v에서 꼭지점 w로 가는 경로(path)란 서로 다른 꼭지점의 나열 $v_0, v_1, \ldots, v_k$인데 $v_0 = v$이고 $v_k = w$이면서 $v_{i-1}v_i$는 모두 그래프의 변이어야 한다.

그래프가 연결되어있다는 것은 아무렇게나 두 꼭지점을 잡던지 그 사이에 경로가 존재함을 뜻한다.

정리 6. x, y, z가 세 꼭지점이라고 하자. x에서 y로 가는 경로와 y에서 z로 가는 경로가 있다면 x에서 z로 가는 경로가 있다.

따라서 그래프를 연결된 부분그래프(component)들로 나누되, 그 부분그래프들 사이에는 변과 공유하는 꼭지점이 없도록 나눌 수 있다.

이분 그래프 (bipartite graph)

이분그래프란 모든 변이 X에 있는 꼭지점과 Y에 있는 꼭지점을 잇는 형태가 되도록 꼭지점 집합을 $X \cup Y$로 분할할 수 있는 그래프.

회로(cycle)란 각 꼭지점의 차수가 정확히 2인 연결된 부분그래프.

정리 7. G가 그래프일때 다음 둘 중 정확히 하나만 참이다.

1. G는 이분그래프이다.

2. G는 홀수 개의 변을 가진 회로를 가진다.

매칭

그래프의 매칭이란 어느 두 변도 같은 꼭지점에서 만나지 않는 변들의 집합이다.

정리 8 (홀Hall의 정리)**.** *G*를 모든 변이 X, Y 사이에만 있는 이분그래프라 하자. 그럼 다음 둘 중 정확히 하나만 참이다.

1. $|X|$개의 변을 가진 매칭이 존재한다.
2. 어떤 X의 부분집합 A가 있어서 $|N_G(A)| < |A|$이다.

   $N_G(A)$는 A의 "이웃"들의 집합이다.

$\nu(G)$: 그래프 G 매칭 중 제일 변이 많은 것의 변의 개수.
$\rho(G)$: 모든 꼭지점을 덮는 변의 집합 중 제일 변의 개수가 적은 것의 변의 개수.

예제 16*.* G가 차수 0인 꼭지점이 없다면

$$\nu(G) + \rho(G) = |V(G)|.$$

평면 그래프 (planar graph)

평면 그래프란, 꼭지점은 평면 위의 점으로, 변은 두 끝점을 있는 곡선으로 그리되 어느 두 변도 서로 교차하지 않게 그릴 수 있는 그래프이다.

평면 그래프의 그림에서 면이란, 평면 그래프의 변과 꼭지점을 지웠을때 남는 연결된 평면조각을 뜻한다.

정리 9 (오일러의 정리)**.** G를 평면에 그려진 연결된 평면그래프라고 하자. v가 꼭지점의 개수, e를 변의 개수, f를 면의 개수라고 하자.

$$v - e + f = 2.$$

정리 10. G가 평면그래프이고 v가 꼭지점의 개수, e를 변의 개수라 하자. $v > 2$라면 $e \le 3v - 6$임을 보여라.

예제 17*.* K_5는 평면그래프가 아니다.

그래프 G의 교차점수 $cr(G)$란 G를 평면상에 그릴때 필요한 최소의 변의 교차점 수를 뜻한다.
G가 평면그래프라면 $cr(G) = 0$.

예제 18*.* $cr(G) \ge e - 3v$.

정리 11. $e \ge 4v$라면 $cr(G) \ge \frac{1}{64}\frac{e^3}{v^2}$임을 보여라.

예제 19*.* 평면 상에 n개의 점이 있다. $k \le 2\sqrt{2n}$이라 하자. $k+1$개 이상의 점을 지나는 선의 개수를 ℓ이라 하자. 이때 $\ell < \frac{32n^2}{k^3}$임을 보여라.

예제 20*.* 평면 상에 n개의 점이 있다. 거리가 정확히 1떨어진 두 점 쌍의 개수를 k라고 하자. 그러면 $k < 5n^{4/3}$임을 보여라.